Лекция 2

Существование и устойчивость положений равновесия динамических систем на прямой

Будем рассматривать автономное дифференциальное уравнение

$$\frac{dN}{dt} = f(N), \tag{1}$$

которое может быть использовано в качестве модели для исследования динамики систем различной природы. Состояние системы при этом описывается функцией $N(t)$, которая характеризует моделируемую величину (например, численность популяции) в момент времени t, когда $t \geqslant t_0$. Вещественная функция $f(N)$ определяет скорость изменения величины $N(t)$.

Для уравнения (1) с начальным условием

$$N(t_0) = N_0, \tag{2}$$

удается провести детальное качественное исследование – определить все аттракторы, доказать, что именно к ним траектории сходятся при $t \to +\infty$ и указать, при каких именно начальных данных на какой аттрактор происходит выход.

Определение 1. *Решение уравнения (1) вида $N(t) = N^* = const$ для $\forall\, t \geqslant t_0$ называется стационарным.*

Точку N^* на фазовой прямой называют *положением равновесия* (или *особой точкой, точкой покоя, стационарным состоянием, неподвижной точкой*).

Очевидно, что все положения равновесия уравнения (1) являются корнями уравнения

$$f(N) = 0. \tag{3}$$

Если по своему смыслу функция $N(t)$ является неотрицательной, то при исследовании решений уравнения (1) надо искать только неотрицательные корни уравнения (3).

Как правило, никакая реальная система не может находится все время в одном и том же состоянии, так как подвержена внешним воздействиям. Возникает вопрос, что произойдет, если внести возмущение в систему так, что ее состояние окажется в некоторой окрестности положения равновесия? Возможно, что с течением времени траектории покинут окрестность, а может быть, наоборот, – будут приближаться к положению равновесия. Первый вариант движения соответствует неустойчивости, а второй – устойчивости положения равновесия. Далее будем рассматривать термин «устойчивость» в смысле устойчивости относительно возмущения начальных данных (устойчивость по Ляпунову).

Определение 2. *Положение равновесия N^* уравнения (1)* **устойчиво по Ляпунову,** *если для $\forall\ \epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $|N(t_0) - N^*| < \delta$, то $|N(t) - N^*| < \epsilon$ для $\forall\ t \in [t_0; +\infty)$.*

Иначе говоря, положение равновесия устойчиво, если малые отклонения от положения равновесия не выводят систему из его малой окрестности.

При невыполнении условий определения 2 положение равновесия называют *неустойчивым.* Неустойчивость, в частности, имеет место при нарастании отклонений.

Определение 3. *Положение равновесия N^* системы (1) называется* **асимптотически устойчивым,** *если оно устойчиво по Ляпунову и $\lim\limits_{t\to+\infty}(N(t)-N^*) = 0$, когда $|N(t_0)-N^*| < \delta$, т. е. малые отклонения затухают с течением времени.*

В теории динамических систем асимптотически устойчивые положения равновесия часто называют *аттракторами*[1], или *притягивающими точками*, а неустойчивые – *репеллерами*, или *отталкивающими точками.*

Далее будем считать, что начальный момент времени $t_0 = 0$.

Рассмотрим аналитический метод исследования устойчивости положений равновесия.

[1]Множество точек в фазовом пространстве, к которому стремится изображающая точка с течением времени, называется *аттрактором* (англ. *attract* – привлекать, притягивать) . С другой стороны, множество в фазовом пространстве, от которого изображающая точка «уходит» с течением времени, называется *репеллером* (англ. *to repel* – отталкивать).

Можно показать, что условие $f'(N^*) < 0$ является достаточным для асимптотической устойчивости точки N^*. Действительно, если функция $f(N)$ непрерывно дифференцируема в точке N^*, то характер устойчивости точки покоя можно выяснить, построив в ее окрестности соответствующее *линеаризованное уравнение*. Для этого функцию $f(N)$ в окрестности точки N^* разлагают в ряд Тейлора и оставляют только линейные слагаемые. Линеаризованное уравнение при этом имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f'(N^*)x, \tag{4}$$

где $x(t) = N(t) - N^*$ – отклонение от положения равновесия в момент времени t.

Связь решений линеаризованного уравнения (4) и исходного (1) устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. (Теорема Гробмана-Хартмана.) *Непрерывно дифференцируемое векторное поле*[2] *с гиперболической особой точкой в некоторой окрестности этой точки топологически эквивалентно своей линейной части.*

Так как решением уравнения (4) с начальным условием $x(0) = x_0$ является функция $x(t) = x_0 \cdot \exp(f'(N^*)t)$, то устойчивость стационарного состояния N^* уравнения (1) определяется по знаку производной правой части уравнения в точке покоя.

Теорема 2. (Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.) *Пусть N^* – положение равновесия уравнения (1). Функция $f(N)$ и ее производная $f'(N)$ определены и непрерывны для любых $N \in D$. Тогда,*

1) если $f'(N^*) < 0$, то N^* – асимптотически устойчиво (рис. 1 а));

2) если $f'(N^*) > 0$, то N^* – неустойчиво (рис. 1 б)).

Значение $\lambda = f'(N^*)$ называют *собственным значением*, или *характеристическим показателем*, положения равновесия N^* уравнения (1).

[2] Функция $f(N)$ в правой части уравнения (1) задает векторное поле на прямой.

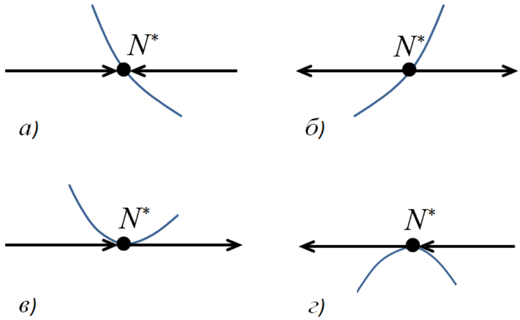

Рис. 1. Фазовые портреты для изолированных положений равновесия: а) аттрактора, б) репеллера, в) и г) полуустойчивых положений равновесия

В случае, когда $f'(N^*) = 0$, анализ решения линеаризованного уравнения не дает определенного ответа о характере устойчивости точки N^* и необходимы дополнительные исследования.

Положение равновесия N^*, для которого $f'(N^*) = 0$, при одних условиях может быть устойчивым, а при других – неустойчивым или полуустойчивым. В частности, если $f''(N^*) \neq 0$, то точка N^* является полуустойчивой[3]. Действительно, $f''(N^*) > 0$, то начальному состоянию $N_0 \in (N^* - \epsilon, N^*)$ соответствует траектория, приближающаяся к точке N^* при $t \to +\infty$, а для $N_0 \in (N^*, N^* + \epsilon)$ – траектория, которая удаляется от N^* при увеличении t (см. рис. 1 в)) . Если $f''(N^*) < 0$, то, наоборот, положение равновесия притягивает только те траектории, для которых $N_0 \in (N^*, N^* + \epsilon)$ (см. рис. 1 г)).

Теорема 3. *Пусть N^* – положение равновесия уравнения (1). Функция $f(N)$ и ее производные $f'(N), f''(N)$ определены и непрерывны в области D, причем $f'(N^*) = 0$. Тогда,*

1) если $f''(N^*) \neq 0$, то N^* – полуустойчиво;

2) если $f''(N^*) > 0$, то для любого решения $N(t)$ задачи Коши (1)-(2) $N(t) \to N^*$ при $t \to +\infty$, когда $N_0 \in (N^* - \varepsilon, N^*)$;

3) если $f''(N^*) < 0$, то для любого решения $N(t)$ задачи Коши (1)-(2) $N(t) \to N^*$ при $t \to +\infty$, когда $N_0 \in (N^*, N^* + \varepsilon)$.

Если же функция $f(N)$ обладает следующими свойствами

[3] Заметим, что в этом случае N^*, как корень уравнения (3), имеет кратность, равную двум.

$$f(N^*) = f'(N^*) = f''(N^*) = 0,\ f'''(N^*) \neq 0,$$

то можно показать, что устойчивость положения равновесия N^* зависит от знака производной $f'''(N^*)$[4].

Постройте схематично график гладкой функции в малой окрестности точки N^*, когда $f(N^*) = f'(N^*) = f''(N^*) = 0, f'''(N^*) \neq 0$, и соответствующий фазовый портрет уравнения (1).

Теорема 4. *Пусть N^* – положение равновесия уравнения (1). Функция $f(N)$ и ее производные $f'(N), f''(N), f'''(N)$ определены и непрерывны в области D, причем $f'(N^*) = f''(N^*) = 0$. Тогда,*

1) если $f'''(N^*) < 0$, то N^* – асимптотически устойчиво;

2) если $f'''(N^*) > 0$, то N^* – неустойчиво.

Анализируя поведение малых отклонений от положения равновесия, делают вывод о его *локальной устойчивости.* О глобальной устойчивости точки покоя можно говорить лишь в том случае, когда уравнение (1) имеет только одну точку покоя и любое его решение через конечный промежуток времени окажется в окрестности точки покоя.

[4]В этом случае N^* является корнем уравнения (3) кратности 3.